Résolution du défi n^o 3 : Mettez de l'optimisation dans votre solution avec IBM CPLEX

IMAvengers

6 décembre 2013

1 Travail réalisé

Après avoir modélisé le problème sous la forme d'un programme linéaire, nous avons utilisé ILOG Cplex avec l'API Java. Afin de vérifier que les solutions obtenues étaient effectivement réalisables, un vérificateur de solutions a été codé. La modélisation est présentée dans la partie 2. Le cas général du problème est traité dans la partie 3 Les résultats sont présentés dans la partie 4.

2 Modélisation du problème

2.1 Données

I : ensemble des lignes de l'encart

J : ensemble des colonnes de l'encart

K : ensemble des diagonales de l'encart

$TabL$: tableau des valeurs en rapport aux pourcentages de femmes sur les diagonales qu'il est possible d'obtenir

l : indice du tableau TabL (de 1 à $|TabL|$)

Dans le cas qui nous intéresse ici, on considère 8 lignes ($|I| = 8$) et 8 colonnes($|J| = 8$). Il y a dans ce cas 30 diagonales ($|K| = 30$). La figure 1 indique la numérotation utilisée. Nous avons cibler l'utilisation d'*ILOG Cplex Optimizer*, outil que nous maîtrisons le plus. La modélisation du problème sous la forme d'un programme linéaire a donc été recherchée. Pour cela, nous introduisons le tableau $TabL$ contenant des valeurs en rapport aux pourcentages de femmes sur les diagonales qu'il est possible d'obtenir (cf 2.6).

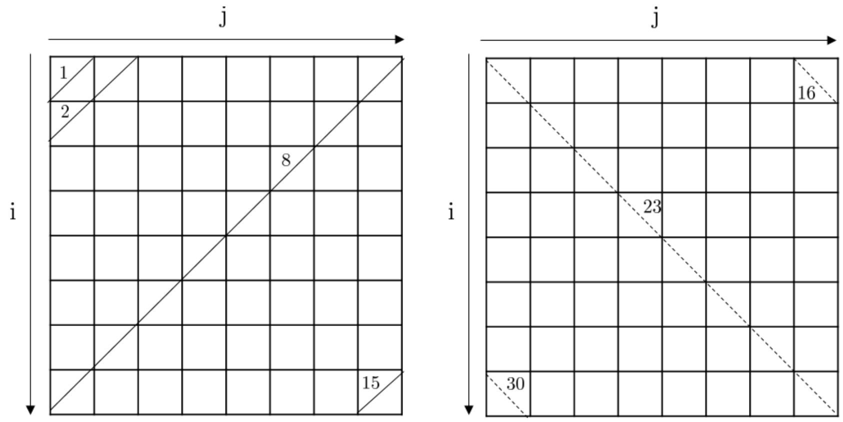


FIGURE 1 – Numérotation des diagonales $k \in K$ utilisés pour la modélisation du problème

2.2 Variables de décision

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le carré } (i,j) \text{ correspond à une femme} \\ 0 & \text{sinon (donc un homme)} \end{cases}$$

$y_j =$ Nombre de femmes sur la colonne $j, j \in [1;8]$

$C_k =$ Pourcentage de femmes sur la diagonale k

$$\alpha_t = \begin{cases} 1 & \text{si il y a } t \text{ femmes sur chaque ligne, } t \in [0;8] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$z_l^k = \begin{cases} 1 & \text{si } C_k \text{ est associé à la valeur } TabL[l] \text{ (avec } TabL[l] \text{ la } l\text{ième valeur de l'ensemble } TabL) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$u_l = \begin{cases} 1 & \text{si } z_l^k \text{ est égale à 1 pour au moins un } l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$v_{jr} = \begin{cases} 1 & \text{si } y_j = r \text{ (s'il y a } r \text{ femmes dans la colonne } j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$p =$ Nombre de femmes par ligne

2.3 Fonction objectif

La fonction objectif cherche à maximiser le nombre de diagonales avec des pourcentages de femmes différents.

$$\max \text{ z} = 1000 \cdot \sum_{l \in L} u_l \tag{1}$$

Par définition des valeur u_l, $\sum_{l \in L} u_l$ représente le nombre de pourcentages de femmes différents sur les diagonales de l'encart.

2.4 Contraintes

$$\sum_{j=1}^{8} x_{ij} = p \qquad \forall i \in [1;8] \tag{2}$$

$$\sum_{t=1}^{8} t \cdot \alpha_t = p \qquad \forall i \in [1;8] \tag{3}$$

$$\sum_{t=1}^{8} \alpha_t = 1 \qquad \forall i \in [1;8] \tag{4}$$

Les contraintes (2)-(4) imposent que le nombre de femmes soit égal sur chaque ligne. Raisonner en terme de nombre de femmes par ligne équivaut ici à raisonner en terme de pourcentage. La contrainte (2) indique que la somme du nombre de femmes sur chaque ligne est égal à p. Dans (3) et (4), on associe une unique valeur de $t \in [1;8]$ à p.

$$\sum_{i=1}^{8} x_{ij} = y_j \qquad \forall j \in [1;8] \tag{5}$$

$$y_j = \sum_{r} r \cdot v_j^r \qquad \forall j \in [1;8] \tag{6}$$

$$\sum_{r} v_j^r = 1 \qquad \forall j \in [1;8] \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{8} v_j^r \leq 1 \qquad \forall r \in [0;8] \tag{8}$$

Les contraintes (5)-(8) imposent que les pourcentages de femmes sur chaque colonne soit tous distincts. Raisonner en terme de nombre de femmes par colonne équivaut également ici à raisonner en terme de pourcentage. La contrainte 5 couple les variables x et y afin que chaque $y_j, j \in [1;8]$ correspond au nombre de femmes dans la colonne j. Dans (6) et (7), on associe une unique valeur de $r \in [0;8]$ à chaque y_j. Enfin la contrainte 8 contraint les $y_j, j \in [1;8]$ à être tous différents ce qui revient à dire que le nombre de femmes sur chaque colonne est différent.

$$k \cdot C_k = 100 \cdot \sum_{i=1}^{k} x_{(k+1-i,i)} \qquad \forall k \in [1;8] \tag{9}$$

$$(16-k) \cdot C_k = 100 \cdot \sum_{i=k-8}^{7} x_{(k-i,i+1)} \qquad \forall k \in [9;15] \tag{10}$$

$$(k-15) \cdot C_k = 100 \cdot \sum_{i=1}^{k-15} x_{(i,i-k+23)} \qquad \forall k \in [16;23] \tag{11}$$

$$(31-k) \cdot C_k = 100 \cdot \sum_{i=k+1-23}^{8} x_{(i,i-k+23)} \qquad \forall k \in [24;30] \tag{12}$$

$$840 * C_k = \sum_{l \in L} TabL[l] \cdot z_l^k \qquad \forall k \in K \tag{13}$$

$$\sum_{l \in L} z_l^k = 1 \qquad \forall k \in K \tag{14}$$

$$\sum_{k \in K} z_l^k \geq u_l \qquad \forall l \in L \tag{15}$$

$$Card(K) \geq \sum_{k \in K} z_l^k \qquad \forall l \in L \tag{16}$$

Les contraintes (9)-(16) portent sur les diagonales du problème afin de pouvoir exprimer la fonction objectif. Les contraintes (9)-(12) permettent de calculer les C_k à partir des valeurs x_{ij} de l'encart. Notre volonté d'exprimer la valeur des C_k en fonction des indices k des diagonales (cf figure 1) font que les formules sont un peu "alambiquées". La contrainte 13 permet d'associer au pourcentage de femmes sur la diagonale k (représenté par c_k) un nombre de la liste $TabL$. La contrainte (14) permet de rendre ce nombre unique. La contrainte (15) force la variable u_l à prendre la valeur 1 si au moins une diagonale à un pourcentage de femmes égale en rapport avec $TabL[l]$. Enfin, on restreint u_l à être nul dans la contrainte (16) si aucune diagonale de l'encart n'a un pourcentage de femmes en rapport avec la valeur $ListeL[l]$. Pour plus d'explications en rapport à la liste $TabL$ (cf **??**).

2.5 Programme linéaire

Le programme linéaire est le suivant Le modèle $[P_n]$ est alors le suivant :

$$[P_n] \;\; \max \text{ z} = 1000 \cdot \sum_{l \in L} u_l$$

$$
sc\left\{\begin{array}{rr}
\sum_{j=1}^{8} x_{ij} = p & \forall i \in [1;8] \\
\sum_{t=1}^{8} t \cdot \alpha_t = p & \forall i \in [1;8] \\
\sum_{t=1}^{8} \alpha_t = 1 & \forall i \in [1;8] \\
\sum_{i=1}^{8} x_{ij} = y_j & \forall j \in [1;8] \\
y_j = \sum_{r} r \cdot v_j^r & \forall j \in [1;8] \\
\sum_{r} v_j^r = 1 & \forall j \in [1;8] \\
\sum_{j=1}^{8} v_j^r \leq 1 & \forall r \in [0;8] \\
k \cdot C_k = 100 \cdot \sum_{i=1}^{k} x_{(k+1-i,i)} & \forall k \in [1;8] \\
(16-k) \cdot C_k = 100 \cdot \sum_{i=k-8}^{7} x_{(k-i,i+1)} & \forall k \in [9;15] \\
(k-15) \cdot C_k = 100 \cdot \sum_{i=1}^{k-15} x_{(i,i-k+23)} & \forall k \in [16;23] \\
(31-k) \cdot C_k = 100 \cdot \sum_{i=k-22}^{n} x_{(i,i-k+23)} & \forall k \in [23;30] \\
n! * C_k = \sum_{l \in L} TabL[l] \cdot z_l^k & \forall k \in K \\
\sum_{l \in L} z_l^k = 1 & \forall k \in K \\
\sum_{k \in K} z_l^k \geq u_l & \forall l \in L \\
Card(K) \geq \sum_{k \in K} z_l^k & \forall l \in L
\end{array}\right.
$$

2.6 Explications sur l'utilisation du tableau $TabL$

Le procédé est utilisé pour définir la fonction objectif ainsi que pour éviter des problèmes d'arrondis par Cplex amenant à des problèmes de réalisabilité.

2.6.1 Cas de 3 lignes et 3 colonnes

Pour $Card(I) = 3$ et $Card(J) = 3$ (3 lignes et 3 colonnes), il y a 5 valeurs possibles pour les pourcentages de femmes sur les diagonales de l'encart. Ces valeurs sont résumées dans la 1ère colonne du tableau 1. On multiplie ensuite ces fractions par le $100 \cdot PPCM(\{k \in [1,3]\}) = 600$ pour obtenir les résultats de la 2ème colonne. Dans la 3ème colonne on associe une case dans le tableau TabL.

Fraction f	$100 * PPCM * f$	Place dans le tableau TabL
0	0	TabL[1]
$\frac{1}{3}$	200	TabL[2]
$\frac{1}{2}$	300	TabL[3]
$\frac{2}{3}$	400	TabL[4]
1	600	TabL[5]

TABLE 1 – Liste des pourcentages possibles de femmes par diagonales et références associées dans le tableau TabL

Les contraintes (13) sont dans ce cas les suivantes. Il y a 10 diagonales ici.

$840 * C_1 = 0 \cdot z_1^1 + 200 \cdot z_2^1 + 300 \cdot z_3^1 + 400 \cdot z_4^1 + 600 \cdot z_5^1$
$840 * C_2 = 0 \cdot z_1^2 + 200 \cdot z_2^2 + 300 \cdot z_3^2 + 400 \cdot z_4^2 + 600 \cdot z_5^2$
$840 * C_3 = 0 \cdot z_1^3 + 200 \cdot z_2^3 + 300 \cdot z_3^3 + 400 \cdot z_4^3 + 600 \cdot z_5^3$
$840 * C_4 = 0 \cdot z_1^4 + 200 \cdot z_2^4 + 300 \cdot z_3^4 + 400 \cdot z_4^4 + 600 \cdot z_5^4$
$840 * C_5 = 0 \cdot z_1^5 + 200 \cdot z_2^5 + 300 \cdot z_3^5 + 400 \cdot z_4^5 + 600 \cdot z_5^5$
$840 * C_6 = 0 \cdot z_1^6 + 200 \cdot z_2^6 + 300 \cdot z_3^6 + 400 \cdot z_4^6 + 600 \cdot z_5^6$
$840 * C_8 = 0 \cdot z_1^7 + 200 \cdot z_2^7 + 300 \cdot z_3^7 + 400 \cdot z_4^7 + 600 \cdot z_5^7$
$840 * C_8 = 0 \cdot z_1^8 + 200 \cdot z_2^8 + 300 \cdot z_3^8 + 400 \cdot z_4^8 + 600 \cdot z_5^8$
$840 * C_9 = 0 \cdot z_1^9 + 200 \cdot z_2^9 + 300 \cdot z_3^9 + 400 \cdot z_4^9 + 600 \cdot z_5^9$
$840 * C_10 = 0 \cdot z_1^{10} + 200 \cdot z_2^{10} + 300 \cdot z_3^{10} + 400 \cdot z_4^{10} + 600 \cdot z_5^{10}$

2.6.2 Cas de 8 lignes et 8 colonnes

Pour $Card(I) = 8$ et $Card(J) = 8$ (8 lignes et 8 colonnes), il y a 23 valeurs possibles pour les pourcentages de femmes sur les diagonales de l'encart. Ces valeurs sont résumées dans la 1ère colonne du tableau 2. On multiplie ensuite ces fractions par le $100 \cdot PPCM(\{k \in [1, 8]\}) = 84000$ pour obtenir les résultats de la 2ème colonne. Dans la 3ème colonne on associe une case dans le tableau TabL.

Le tableau $TabL$ intervient dans la définition des variables z_l^k.

$$z_l^k = \begin{cases} 1 & \text{si } C_k \text{ est associé à la valeur } TabL[l] \text{ (avec } TabL[l] \text{ la } l\text{ième valeur du tableau } TabL) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette association apparaît explicitement dans la contrainte (13).

$$840 * C_k = \sum_{l \in L} TabL[l] \cdot z_l^k \qquad \forall k \in K$$

Pour comprendre le procédé, utilisons un exemple en nous intéressant à la 8ème diagonale. La contrainte s'exprime de la manière suivante :

$840 * C_8 = TabL[l] \cdot z_1^8 + TabL[2] \cdot z_2^8 + TabL[3] \cdot z_3^8 + ... + TabL[22] \cdot z_{22}^8 + TabL[23] \cdot z_{23}^8$

$\Leftrightarrow 840 * C_8 = 0 \cdot z_1^8 + 10500 \cdot z_2^8 + 14000 \cdot z_3^8 + ... + 73500 \cdot z_{22}^8 + 73500 \cdot z_{23}^8$
Si le pourcentage C_8 de femmes sur la diagonale 8 est égale à $C_8 = 12.5\% = \dfrac{100}{8} = \dfrac{10500}{840}$ alors la contrainte devient :

$$840 * \frac{10500}{840} = 0 \cdot z_1^8 + 10500 \cdot z_2^8 + 14000 \cdot z_3^8 + ... + 73500 \cdot z_{22}^8 + 73500 \cdot z_{23}^8$$

Cette contrainte cumulée avec la contrainte (14) impose que $z_2^8 = 1$ et que $z_l^8 = 0$ si $l \neq 2$. On dit alors qu'on associe à C_8 à la valeur $TabL[2]$ (la 2ème valeur de $TabL$).

En ce qui concerne les valeurs u_l, rappelons leur définition.

$$u_l = \begin{cases} 1 & \text{si } z_l^k \text{ est égale à 1 pour au moins un } l \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si on reprend l'exemple, comme $z_2^8 = 1$, la contrainte (15) implique que $u^2 = 1$. Si une autre diagonale k a le même pourcentage de femmes sur sa diagonale, la valeur de u^2 n'est pas modifié et vaut toujours 1. On décompte donc une seule fois un profit de 1000 dans la fonction objectif.

3 Traitement du cas général du problème

Le modèle proposé est applicable pour le cas général où on considère $Card(I) = Card(j) = n(n$ lignes et n colonnes). Le calcul des C_k se fait par les formules (17)-(20)

$$k \cdot C_k = 100 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_{(k+1-i,i)} \qquad \forall k \in [1; n] \tag{17}$$
$$(2n-k) \cdot C_k = 100 \cdot \sum_{i=k-n}^{n-1} x_{(k-i,i+1)} \qquad \forall k \in [n+1; 2n-1] \tag{18}$$
$$(k-2n+1) \cdot C_k = 100 \cdot \sum_{i=1}^{k-2n+1} x_{(i,i-k+3n-1)} \qquad \forall k \in [2n; 3n-1] \tag{19}$$
$$(4n-1-k) \cdot C_k = 100 \cdot \sum_{i=k-3n+2}^{n} x_{(i,i-k+3n-1)} \qquad \forall k \in [3n; 4n-2] \tag{20}$$

On note $PPCM(\{k \in [1,n]\}) = PPCM_n$ Le tableau $TabL$ est également calculable dans le cas général. Il suffit d'appliquer l'algorithme 1 pour l'initialiser.

Le modèle $[P_n]$ est alors le suivant :

$$[P_n] \;\; \max \text{z} = 1000 \cdot \sum_{l \in L} u_l$$

Algorithme 1 : Calcul du tableau $TabL$

$TabL = \emptyset$;
pour *i de 1 à n* **faire**
  pour *j de 1 à i* **faire**
    $f2 \leftarrow PPCM_n \cdot \frac{j}{i} \cdot 100$;
    si *$TabL$ ne contient pas $f2$* **alors**
      Ajouter $f2$ à $TabL$;

$$
sc \left\{
\begin{array}{rr}
\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = p & \forall i \in [1;n] \\
\displaystyle\sum_{t=1}^{n} t \cdot \alpha_t = p & \forall i \in [1;n] \\
\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \alpha_t = 1 & \forall i \in [1;n] \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = y_j & \forall j \in [1;n] \\
\displaystyle y_j = \sum_{r} r \cdot v_j^r & \forall j \in [1;n] \\
\displaystyle\sum_{r} v_j^r = 1 & \forall j \in [1;n] \\
\displaystyle\sum_{j=1}^{n} v_j^r \leq 1 & \forall r \in [0;n] \\
\displaystyle k \cdot C_k = 100 \cdot \sum_{i=1}^{k} x_{(k+1-i,i)} & \forall k \in [1;n] \\
\displaystyle (2n-k) \cdot C_k = 100 \cdot \sum_{i=k-n}^{n-1} x_{(k-i,i+1)} & \forall k \in [n+1;2n-1] \\
\displaystyle (k-2n+1) \cdot C_k = 100 \cdot \sum_{i=1}^{k-2n+1} x_{(i,i-k+3n-1)} & \forall k \in [2n;3n-1] \\
\displaystyle (4n-1-k) \cdot C_k = 100 \cdot \sum_{i=k-3n+2}^{n} x_{(i,i-k+3n-1)} & \forall k \in [3n;4n-2] \\
\displaystyle PPCM_n * C_k = \sum_{l \in L} TabL[l] \cdot z_l^k & \forall k \in K \\
\displaystyle\sum_{l \in L} z_l^k = 1 & \forall k \in K \\
\displaystyle\sum_{k \in K} z_l^k \geq u_l & \forall l \in L \\
\displaystyle Card(K) \geq \sum_{k \in K} z_l^k & \forall l \in L
\end{array}
\right.
$$

4 Résultats

Le modèle a été résolu pour un nombre n de lignes et de colonnes égal à 8. Nous avons également résolu le problème pour $n \leq 7$. Pour $n \geq 9$, *Cplex* ne trouve pas de solution réalisable dans un temps relativement important (>1h).

4.1 Solution optimale du défi ($n = 8$)

Une solution optimale du défi est présentée par la matrice et le schéma ci-desssous. Elle a pour fonction objectif 19000.

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

4.2 Solution optimale pour $n = 7$

Une solution optimale pour $n = 7$ est présentée par la matrice et le schéma ci-desssous. Elle a pour fonction objectif 15000.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4.3 Solution optimale pour $n = 6$

Une solution optimale pour $n = 6$ est présentée par la matrice et le schéma ci-desssous. Elle a pour fonction objectif 13000.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4.4 Solution optimale pour $n = 5$

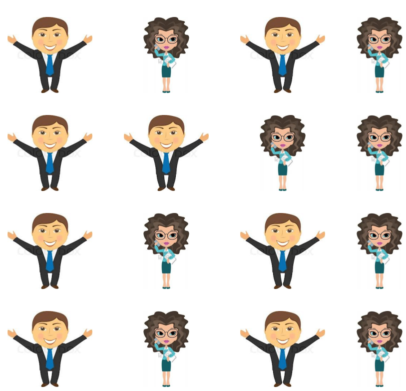
Une solution optimale pour $n = 5$ est présentée par la matrice et le schéma ci-desssous. Elle a pour fonction objectif 9000.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.5 Solution optimale du défi $n = 4$

Une solution optimale pour $n = 4$ est présentée par la matrice et le schéma ci-desssous. Elle a pour fonction objectif 7000.

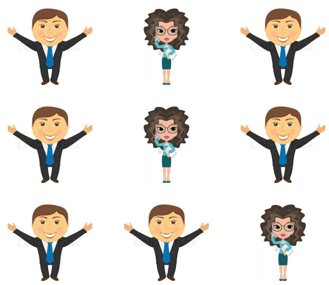
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



4.6 Solution optimale du défi $n = 3$

Une solution optimale pour $n = 3$ est présentée par la matrice et le schéma ci-desssous. Elle a pour fonction objectif 5000.

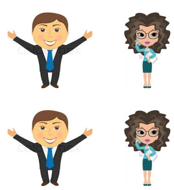
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



4.7 Solution optimale du défi $n = 2$

Une solution optimale pour $n = 2$ est présentée par la matrice et le schéma ci-desssous. Elle a pour fonction objectif 3000.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



4.8 Solution optimale du défi $n = 1$

Une solution optimale pour $n = 1$ est présentée par la matrice et le schéma ci-desssous. Elle a pour fonction objectif 1000.

$$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Fraction f	$100 * PPCM * f$	Place dans le tableau TabL
0	0	TabL[1]
$\frac{1}{8}$	10500	TabL[2]
$\frac{1}{7}$	12000	TabL[3]
$\frac{1}{6}$	14000	TabL[4]
$\frac{1}{5}$	16800	TabL[5]
$\frac{1}{4}$	21000	TabL[6]
$\frac{2}{7}$	24000	TabL[7]
$\frac{1}{3}$	28000	TabL[8]
$\frac{3}{8}$	31500	TabL[9]
$\frac{2}{5}$	33600	TabL[10]
$\frac{3}{7}$	36000	TabL[11]
$\frac{1}{2}$	42000	TabL[12]
$\frac{4}{7}$	48000	TabL[13]
$\frac{3}{5}$	50400	TabL[14]
$\frac{5}{8}$	52500	TabL[15]
$\frac{2}{3}$	56000	TabL[16]
$\frac{5}{7}$	60000	TabL[17]
$\frac{3}{4}$	63000	TabL[18]
$\frac{4}{5}$	67200	TabL[19]
$\frac{5}{6}$	70000	TabL[20]
$\frac{6}{7}$	72000	TabL[21]
$\frac{7}{8}$	73500	TabL[22]
1	84000	TabL[23]

Table 2 – Liste des pourcentages possibles de femmes par diagonales et références associées dans le tableau TabL